

L'esplorazione in Matematica: analisi di un'esperienza didattica

Dott.ssa Annalisa F. Cento

Ester Violetta Violi, Tutor Organizzatore presso il CdL in Scienze della Formazione Primaria, Università degli Studi "Mediterranea" di Reggio Calabria.

Abstract

Il seguente lavoro racchiude un'esperienza didattica che è stata svolta in un Istituto Comprensivo durante la stesura di una tesi di Laurea Magistrale. L'argomento si colloca nell'alveo della Didattica della Matematica, con particolare riferimento alla metodologia didattica incentrata sul gioco. Attraverso l'interpretazione dei questionari che hanno completato i piccoli studenti, si è potuto comprendere come un approccio ludico abbia aiutato gli scolari a raggiungere gli obiettivi posti dall'insegnante in un clima disteso ed empatico.

Parole chiave: ludodidattica, gioco, apprendimento, esplorazione.

1. Introduzione

Sin dai primi esperimenti nelle scuole, il gioco è stato sempre considerato come un buon viatico verso un apprendimento significativo, verso una visione della vita in aula più condivisa ed inclusiva. Durante lo svolgimento di un gioco, infatti, tutti i giocatori si sentono coinvolti e tutti sono "costretti" a giocare, gettando quelle barriere di timidezze e/o inadeguatezza.

Le convinzioni che gli studenti hanno sulla matematica sono molteplici e spesso contrastanti. Dalla visione puramente basata sul calcolo e dunque sulla necessità di saper risolvere un problema (esercizio) a quella valutativa, dove valutazione significa descrivere quella implicazione mai dimostrata che porta ad avere un voto positivo se il risultato dell'esercizio assegnato è corretto. Questo denota come gli studenti si avvicinano alla matematica quasi fosse un esercizio continuo e ripetitivo di fatti insignificanti e privo di qualsivoglia applicazione nel mondo reale. La matematica che diventa un intervallo temporale obbligatorio in un monte orario statico.

Eppure, matematica significa anche creatività, e non solo rigore e logicità. Creatività intesa come una forma di esplorazione tesa alla scoperta di relazioni tra i differenti mondi che convivono all'interno della matematica. Creatività pensata come ricerca di soluzioni alternative in un problema. Creatività vista come la possibilità di far viaggiare gli studenti di ogni ordine e grado dentro un mondo fatto di regole, di forme e figure, di numeri ed equazioni e come piccoli Indiana Jones a vedere di collegare le varie conoscenze apprese in un continuum spazio/temporale, quasi fosse un viaggio fantastico. La matematica deve divenire per ogni studente un volano verso la scoperta del mondo reale dove noi docenti abbiamo il dovere di far osservare come la vita si possa tradurre nel linguaggio formale della matematica.

Come scrive Pansera nel "Trattato della ConCuranza": *"Quante persone sparse per il mondo si dimostrano noncuranti nei confronti della Matematica, una scienza fondamentale, di base, come viene definita con sufficienza da parte di coloro che la inseriscono in molti corsi di studio, quasi fosse un atto dovuto. Eppure questa apparente sterilità matematica nell'ultima decade è venuta meno e anche le persone che sono fuori da percorsi didattici- divulgativi e di ricerca hanno cominciato a percepire che questa musa dispettosa - che vive isolata nel suo ricco emisfero fatto di leggi (i teoremi), di conseguenze (i corollari) e di una schiera limitata di adepti che cercano di dimostrare qualsiasi parola lei voglia dispensare - diviene punto focale e strategico per la risoluzione di tutti i*

problemi connessi con l'evoluzione tecnologica. Si perviene, quindi, ad una nuova realtà dove la Matematica deve essere trattata ConCura e il matematico non viene percepito come appartenente ad una nicchia ristretta che studia tematiche astratte e poco attivabili, ma viene visto alla stregua di un qualsiasi scienziato, capace con le sue equazioni di facilitare la vita quotidiana.”

Questo spirito deve essere trasmesso alle giovani ed avidi menti (cit. *A beautiful mind*) perché comprendono fin dai primi anni di vita la bellezza di una scienza e la sua essenzialità nel mondo che ci circonda.

Questo si può fare attraverso la ludodidattica, intesa come scienza e non come banalizzazione della matematica ad un mero gioco. *“Di fondamentale importanza per lo sviluppo mentale, per la formazione del futuro adulto, per la prima interazione sociale con gli altri, il gioco contribuisce alla sua crescita serena ed equilibrata. Nel contesto ludico, infatti, il bambino può liberare la sua fantasia, esprimere tutto il suo mondo interiore, manipolare la realtà adattandola al suo specifico universo ed esplorare il mondo esterno nei suoi aspetti fisici e sociali. Il gioco permette al bambino di manifestare il suo subconscio, le sue preferenze, i suoi timori e le sue paure, introduce alla vita, guida le capacità verso un fine, educa l'intelligenza, consente di fare gli esperimenti ficta, anche azzardati, senza imbattersi nell'eventualità dell'insuccesso. Il gioco nel senso di libera improvvisazione, fantasia incontrollata, movimento e divertimento è assimilabile al concetto greco di *paidia*”.* (Marcella Di Franco - *L'arte del gioco e il suo valore educativo*).

Il gioco come strumento, il gioco come apprendimento. In questo scenario non possiamo non ricordare l'opera di Piaget che nel 1962 descrive diverse tappe di sviluppo nel gioco, partendo da quello sensomotorio fino al gioco con regole. La sua visione pone sempre su piani paralleli e consequenziali lo sviluppo cognitivo del bambino e la possibilità di sperimentare attraverso l'attività di gioco le nuove abilità emergenti.

2. Esperienza in aula

L'attività svolta in aula è stata realizzata considerando un percorso didattico finalizzato all'apprendimento attraverso il gioco. Giocando si impara, giocando imparo ad apprendere, giocando acquisisco competenze. Il gioco diventa anello di congiunzione tra la vita scolastica e quella extra scolastica, diventa quella visione nuova ed innovativa che affianca la consueta attività didattica. Il gioco che diventa studio e lo studio diventa apprendimento.

Lo stupore degli allievi quando la maestra presenta l'attività da svolgere fa capire fin da subito che la proposta didattica avrebbe avuto un esito differente. Il gioco proposto rompe il “contratto didattico” (citazione B. D'Amore) perché rompe lo schema preconstituito della routine scolastica e definisce quella frattura che diviene fonte di apprendimento.

L'esperienza si è svolta in una classe seconda primaria di una scuola paritaria. La classe è composta da 15 bambini, 8 femmine e 7 maschi. Sono presenti 4 bambini anticipatori. Non sono presenti alunni con Disturbo specifico dell'apprendimento, anche se la docente di classe riferisce di due alunni che manifestano comportamenti che, a suo parere, meriterebbero un approfondimento diagnostico. Al momento della verifica erano presenti 14 bambini, 7 maschi e 7 femmine. Il clima in aula è collaborativo. L'attività si è sviluppata in tre fasi: la prima fase quella di conoscenza della classe dove si è cercato di analizzare l'approccio dei discenti nei confronti della Matematica. La situazione a prima vista appare quella di una classe che si approccia alla Matematica senza particolari problematiche; persistono alcuni casi di incertezza ed insicurezza nello svolgimento di prove in aula dove gli studenti cercano sempre la conferma dell'aver svolto il loro lavoro in modo corretto. Si riscontra anche qui la visione di una scuola che finalizza la sua valutazione sulla risoluzione corretta degli elaborati e dunque il binomio esercizio esatto significa buon voto.

Una delle criticità che sono emerse dal confronto con gli studenti della classe è l'avversione verso i problemi, come già evidenziato da Rosetta Zan (citazione) con particolare riferimento alle difficoltà di comprensione del testo, della complessità di risolvere un quesito eteroposto e quindi del definire strategie risolutive che vadano oltre il ripetitivo esercizio. Punto nevralgico per il superamento dei problemi in matematica è questa “rassegnazione” di fronte ad un problema, al “non farcela”, al “non sentirsi adeguati”. La visione della matematica diventa anche un modo per avere quel “ruolo sociale” fondamentale nel gruppo

classe, l'essere colui/colei che affronta e risolve i problemi più difficili. Nasce, dunque, la necessità di percorsi differenti, di attività didattiche più inclusive dove tutti sono partecipi e tutti sono protagonisti. La didattica deve, quindi, rendere gli studenti ben preposti verso la disciplina e vogliosi di apprendere divertendosi (citazione).

La lezione tradizionale non è più sufficiente per rispondere a tutte le richieste di una società proiettata verso la tecnologia e l'iperconnessione, dove gli allievi sono nativi digitali con il bagaglio di insicurezza che ne deriva dall'uso spropositato dei mezzi di comunicazione. Questi fatti si accentuano in una materia diversa come la matematica. Diversa nel pensiero, diversa nella forma, diversa nel linguaggio. Linguaggio che diventa simbolo e simbolo che diventa parola. L'alfabeto della matematica esula dalle lettere e dalle normali regole della grammatica, il linguaggio matematico è esso stesso parola e la parola va interpretata, studiata, compresa, rielaborata. Nascono necessariamente delle fratture nel processo di insegnamento-apprendimento e queste criticità vengono recepite dagli studenti in modo alcune volte devastante, tanto da allontanarli dalla matematica. Si comprende il significato di utilizzare strumenti alternativi alla usuale attività in aula.

2.1 Dory Mathematic

La tecnica dello storytelling apre la strada al percorso didattico progettato per la classe seconda della scuola primaria. A ciascun allievo viene consegnato un "Diario da esploratore", chiedendo, per evitare distrazioni, di tenere sul proprio banco solo quanto strettamente necessario allo svolgimento dell'attività: penna, matita, matite colorate. Durante lo svolgimento della prova si è fatto uso della LIM per spiegare passo dopo passo le attività da svolgere. Il tempo per svolgere la prova è stato due ore, senza cadenzare in anticipo il tempo da dedicare alle singole attività. Ciò per evitare di mettere fretta ai bambini e invece per assecondare i loro tempi e le loro esigenze.

Dory Mathematic è una piccola esploratrice con la passione per la Matematica, chiede ai piccoli allievi di accompagnarla in uno dei suoi "viaggi nel tempo". Servendosi di una speciale macchina del tempo progettata dai suoi genitori, Dory infatti vive delle incredibili avventure tra passato e futuro, risolvendo enigmi matematici che le permettono di fare nuove scoperte e imparare sempre qualcosa di nuovo"

La storia che ho inventato come sfondo all'attività si presta ad essere riproposta in diversi momenti dell'anno scolastico, con nuovi argomenti e spunti, per accompagnare i bambini in maniera giocosa con un vero e proprio percorso di apprendimento insieme a Dory che, nel tempo, può diventare per i bambini un personaggio familiare.

Ciascun bambino ha avuto in dotazione, per lo svolgimento dell'esperienza, un "Diario da Esploratore", all'interno del quale vengono riportate tutte le attività da svolgere, nonché la storia che fa da sfondo.

I tempi dell'attività e la narrazione della storia sono stati accompagnati da un Powerpoint (progetto realizzato su Canva.com). Lo scorrere delle immagini alla LIM, è stato utile per fornire agli studenti le indicazioni per lo svolgimento in maniera più interattiva e contemporaneamente per tutti. Questa accortezza dovrebbe anche aver reso più agevole la comprensione delle attività, consentendo di mettere a proprio agio i bambini nello svolgimento, visto che per loro l'approccio ludico rappresenta una novità, evitando anche possibili distrazioni.

Attraverso la narrazione della storia e la predisposizione del materiale che è stato fornito, gli studenti sono stati chiamati a svolgere una verifica sulle tre operazioni, (addizione, sottrazione e moltiplicazione) che sono state fino ad allora oggetto di studio in classe.

Ciò che ha caratterizzato l'attività è stato anche, oltre l'aspetto ricreativo, un'attenzione alla interdisciplinarietà: il racconto che fa da sfondo ai giochi matematici offre qualche spunto riguardo il programma di storia previsto per il prossimo anno, introducendo la conoscenza dei dinosauri ed è poi prevista una attività di coding, consistente nel realizzare un disegno seguendo le coordinate indicate. Ritroviamo poi elementi di arte e immagine, nonché una attività che propone il ripasso dei colori in lingua inglese. Attraverso la narrazione si è utilizzata la metodologia del "problema a righe" creata da R. Zan per coinvolgere i bambini nello svolgimento dei problemi, rendendoli partecipi e motivati alla risoluzione. (citazione tesi).

2.2 Il diario dell'esploratore

È composto di 16 pagine: alcune, esclusivamente legate alla dimensione narrativa dello storytelling, fanno da filo conduttore all'attività di verifica vera e propria, e introducono al personaggio protagonista della storia e alle nozioni di storia che accompagnano la narrazione, visto che il "viaggio nel tempo" di Dory è ambientato

nel passato, tra i dinosauri. Altre, le più numerose, riportano i giochi matematici da risolvere: quiz di logica, addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, un problema “narrativo”, oltre che veri e propri “giochi enigmistici” che possono essere risolti applicando le conoscenze matematiche. “ (citazione tesi)

2.3 I risultati

L'osservazione che ho condotto sugli alunni durante lo svolgimento dell'attività di matematica ricreativa sperimentata in classe si è rivelata interessante sotto molti punti di vista.

Anzitutto, è stato stimolante notare come, anche se non avessero familiarità con me, i bambini si sono subito messi in gioco senza resistenze. Probabilmente rassicurati dalla presenza dell'insegnante di classe, si sono fatti prendere dal clima di gioco fin da subito.

Già dalla prima slide, infatti, quasi tutti i bambini si sono proposti spontaneamente per leggere ad alta voce il testo del “Diario dell'esploratore” proiettato alla LIM. La lettura condivisa ha consentito a tutti i membri della classe di esporre i propri dubbi o le proprie incertezze rispetto allo svolgimento degli esercizi proposti senza timore.

In particolare, i bambini hanno svolto quasi senza incertezze le operazioni proposte, anche se di fronte all'addizione a quattro cifre hanno avuto qualche titubanza, dovuta più al numero delle cifre che allo svolgimento in sé. Per agevolarli nell'esecuzione, visto che l'incertezza era diffusa, ho scritto alla lavagna l'operazione in colonna. Questo accorgimento è stato sufficiente affinché tutti la svolgessero senza problemi.

Le attività più propriamente ludiche, come “Unisci i puntini” o la griglia da colorare secondo le coordinate fornite, sono state svolte dai bambini con grande facilità, e durante l'esecuzione, i piccoli studenti hanno manifestato apprezzamento per l'aspetto giocoso degli esercizi. Un bambino soltanto ha completato l'attività di coding con più lentezza, ma comunque in autonomia.

Interessante è stato anche osservare i bambini alle prese con l'attività “Color by number” di pag. 11 del “Diario dell'esploratore”. Questo esercizio ha coniugato Matematica, Inglese ed Arte e immagine. In particolare, i bambini hanno risolto le addizioni proposte, abbinando al risultato il colore in lingua inglese. Una volta compresa l'immagine che sarebbe risultata dopo lo svolgimento dell'attività, ho notato che alcuni bambini hanno iniziato a procedere più ad intuito che svolgendo realmente le operazioni rimaste. Non sempre però l'intuizione ha supportato il risultato corretto e, in qualche occasione, alcuni bambini sono stati costretti a rivedere il proprio lavoro per ottenere la figura colorata correttamente.

L'attività di pagina 12 era invece un problema, inserito all'interno della narrazione sui dinosauri fatta dalla nostra protagonista Dory Mathematic: raccontando ai bambini delle caratteristiche del Brontosauero, la piccola esploratrice chiede di indovinare l'altezza del dinosauro, dicendo loro che “era alto come un palazzo di 6 piani”, dopo aver specificato che ciascun piano di un palazzo è alto 3 metri.

Ciò che ho notato immediatamente è stato che nessuno dei bambini ha avuto la percezione, nel leggere il testo, di trovarsi “faccia a faccia” con un “problema”. Probabilmente, questo è derivato dal fatto che non ci si trovava di fronte ad un problema classico, con una struttura standard che, anche già visivamente, richiamasse questa tipologia di attività, bensì ad un quesito inserito in una più ampia narrazione, senza elementi identificativi tipici e che, al contrario, si riferiva ad una esigenza pratica, legata, in generale, alla narrazione condotta dalla nostra amica esploratrice e, più nello specifico, alla conoscenza del dinosauro in questione.

Tra tutte le attività proposte, lo svolgimento del problema ha rappresentato la difficoltà maggiore per i bambini.

Il primo step da affrontare è stato, appunto, l'identificazione della richiesta come “problema” da risolvere.

In un secondo momento, i bambini si sono concentrati sulla comprensione del testo ed in particolare della richiesta fatta loro. Questo è stato, a mio avviso, il passaggio più complesso per gli studenti. La domanda che quasi tutti si sono fatti, chiedendo a me, ma anche parlandone tra di loro, è stata: “che operazione si deve fare?” Il concentrare la propria attenzione più sul prodotto da ottenere (il risultato corretto) che sul processo da adottare per la risoluzione ha indotto alcuni di loro ad “improvvisare”, provando ad indovinare l'operazione da eseguire, senza supportare la loro risposta con adeguate motivazioni logiche. Alcuni bambini hanno manifestato un vero e proprio “blocco emotivo” di fronte al testo del problema, soffermandosi a leggere senza però venire a capo della richiesta.

Soltanto due bambine su 14 studenti hanno risolto il problema correttamente, senza aiuti o sollecitazioni esterne, in un tempo ragionevole e fornendo adeguate motivazioni a sostegno della loro soluzione.

Della restante parte dei bambini, quasi tutti hanno manifestato incertezze, chiedendo esplicitamente aiuto per la risoluzione a me o all'insegnante di classe. Ho supportato alcuni di loro, quelli più in difficoltà, proponendo di disegnare il palazzo nominato nel testo del problema, in modo da rendersi conto "visivamente" della situazione problema. Questo espediente ha rappresentato un aiuto per molti di loro che, alla fine, sono giunti autonomamente alla soluzione.

Riguardo appunto il procedimento di risoluzione del problema, alcuni bambini hanno risolto il quesito proposto attraverso una moltiplicazione, adottando il procedimento più corretto. Altri sono giunti comunque alla soluzione esatta, effettuando una addizione.

Durante lo svolgimento dell'esperienza in classe, il clima è stato sempre disteso e sereno. Nessuno tra i bambini ha manifestato ansia o preoccupazione, molto probabilmente perché nessuno di loro ha avuto la sensazione di trovarsi di fronte ad una "verifica" di fine quadrimestre. Tutti, anche i più timidi, hanno partecipato attivamente, chiedendo di leggere le slide proiettate alla LIM o anche, tra un esercizio e l'altro, raccontando ciò che sapevano sui dinosauri e qualche aneddoto che li riguardava personalmente.

Soltanto alla fine dell'attività, quando ho ritirato i lavori svolti dai bambini, una studentessa mi ha chiesto sorridendo, quasi stupita: "Maestra, ma quindi abbiamo fatto una verifica giocando? (citazione tesi)

2.4 Il questionario di gradimento

Al termine dell'attività svolta con i bambini, ho somministrato loro un questionario molto semplice ed intuitivo, composto da tre domande:

- Ti sei divertito?
- Pensi di aver imparato qualcosa?
- Ti piacerebbe ripetere questa esperienza?

Ad ogni domanda inserita nella griglia, sono state associate tre risposte – Sì, Forse/Non so, No – rappresentate con tre smile colorati, abbinabili in maniera facilmente intuibile alle risposte.

I questionari sono stati compilati in maniera anonima, anche se qualche bambino ha voluto motivare espressamente le proprie scelte.

Alla prima domanda, 13 bambini hanno risposto di essersi divertiti, selezionando lo smile di colore verde. Un solo bambino ha risposto di no.

Alla seconda domanda, 10 bambini hanno risposto in maniera affermativa, dichiarando di aver imparato qualcosa di nuovo, 3 hanno selezionato lo smile giallo (forse/non so) e un solo bambino ha scelto l'opzione negativa.

Alla terza domanda, 11 bambini hanno risposto che avrebbero voluto replicare l'esperienza, 2 hanno espresso incertezza, selezionando lo smile giallo e un solo bambino ha risposto di no.

È stato interessante riscontrare che il questionario che ha raccolto 2 risposte negative su 3 (alla prima e alla seconda domanda) è stato compilato da un bambino che la maestra ha definito "con un carattere difficile": spesso dice di annoiarsi, non collabora, pur avendo grande intelligenza non riesce a concentrarsi per metterla a frutto. È stato l'unico bambino a non completare tutte le attività proposte sul "Diario dell'esploratore", motivando questa sua scelta dicendo di essersi stancato.

Il bambino che ha risposto in maniera negativa alla terza domanda (Ti piacerebbe ripetere questa esperienza?) ha voluto spontaneamente chiarire che non avrebbe voluto fare più verifiche perché in classe ne erano già state svolte molte nell'ultimo periodo.

Bibliografia

Adda J., Erreurs provoquées par la representations. Comptes Rendus de la XXVIIIème Rencontre de la Cicaem. Sherbrooke: Université de Sherbrooke, 1987.

Anderman, E.M. & Maehr M.L., Motivation and schooling in the middle grades, «Review of Educational Research», 64, 1994.

Bachelard G., La formation de l'esprit scientifique, Librairie philosophique, Parigi 1938.

Bachelard G., Le nouvel esprit scientifique, 1934, traduzione in italiano Ed. Laterza, Bari, 1978.

Berra M., Cavaletto G.M., Scienza e Tecnologia: superare il gender gap. Un'indagine a Torino, Ledizioni, Milano 2019.

- Brousseau G., Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, 7, 2, 1986.
- Brousseau G., Elementi per una ingegneria didattica. Ed. Pitagora, Bologna 2000.
- Bruner J., A Study of Thinking, John Wiley & sons, New York, 1956. (trad. it. Il pensiero. Strategie e categorie, Armando, Roma, 1969).
- Bruner J., The culture of education, Harvard University Press, Cambridge 1996 (trad. it. La cultura dell'educazione, Feltrinelli, Milano 1996).
- Bruner J., Actual Minds, Possible Worlds. Harvard University Press, Cambridge, 1986 (trad. it. La mente a più dimensioni. Bari: Laterza, 2003).
- Chevallard Y., La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné, La Pensée Sauvage, 1985.
- Chiefari A., Mandrone M.I., Rossetti F., Il problem solving e la matematica ricreativa nella scuola del primo ciclo, Mondo Matematico e Dintorni, Vol 1, No 1-2, 2018.
- Courant R., Robbins H., Che cos'è la matematica? Introduzione elementare ai suoi concetti e metodi, Boringhieri ed., 1985, Torino.
- D'Amore B., Il problema del pastore, in La vita scolastica, Giunti, Firenze, 1993.
- D'Amore B., Sandri P., Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante. La matematica e la sua didattica, 1, 1998 Ed. Pitagora, Bologna.
- D'Amore B. Lingua, Matematica e Didattica. La matematica e la sua didattica. 1, Bologna, 2000.
- D'Amore B., La ricerca in didattica della matematica come epistemologia dell'apprendimento della matematica. Scuola & Città. 4, 2002.
- D'Amore B. Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica. Pitagora Editrice Bologna, 2003.
- D'Amore B., Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società. Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. La matematica e la sua didattica. 3, 2005.
- D'Amore B. in Ostacoli epistemologici e prospettiva socio-culturale, Bruno D'Amore - Luis Radford - Giorgio T. Bagni, 2006.
- D'Amore B., Le basi della didattica della matematica. Scuola Italiana Moderna. Anno 116, n° 6, 2008.
- D'Amore B. – Fandiño Pinilla – Marazzani – Sbaragli, Le difficoltà di apprendimento in matematica. Il punto di vista della didattica. Pitagora Editrice Bologna, 2019.
- D'Amore B., Sugli scivolamenti metadidattici. Alcuni esempi. In Didattica della matematica, disciplina scientifica per una scuola efficace. Convegno in videoconferenza. A cura di B. D'Amore – S. Sbaragli, Pitagora Editrice Bologna, 2020.
- D'Amore B., La didattica della matematica, oggi. Convegno in videoconferenza. A cura di B. D'Amore – S. Sbaragli, Pitagora Editrice Bologna, 2020.
- D'Amore B., Riflessioni sull'apprendimento della Matematica nella Scuola dell'Infanzia ... e anche prima, Bambini, 37(5), 2021.
- Di Martino P., Matematica: l'importanza di argomentare. Intervista di Daniele Gouthier, in Science Magazine n.04, febbraio 2015.
- Donaldson M., Children's minds. London: Fontana Press, 1978 (trad. it. Come ragionano i bambini, Ed. Springer, Milano, 2010).
- Duval R., Registres de Représentations sémiotiques et Fonctionnement cognitif de la Pensée. Annales de didactique et de sciences cognitives. 5, 1993.
- Eco U., Sei passeggiate nei boschi narrativi, Bompiani, Milano, 1994.
- Enriques F. (con lo pseudonimo di Adriano Giovannini), L'errore nelle matematiche. Periodico di matematiche, 22 (4), 1942.
- Fandiño Pinilla M.I., Numeri e problemi nella vita quotidiana [Titolo redazionale] Vita Scolastica, 2011.
- Filippi F., Fiabe matematiche. Percorsi espressivi e attività matematiche per i bambini dai 3 ai 10 anni, Youcanprint, Tricase (LE), 2018.
- Fischbein E., Intuizione e pensiero analitico nell'educazione matematica. In: Chini Artusi L. (ed.), 1985. Numeri e operazioni nella scuola di base. Bologna: Zanichelli-UMI.
- Giberti C., Differenze di genere in matematica: dagli studi internazionali alla situazione italiana, Didattica della Matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula, n. 05, maggio 2019.
- Halmos P., The heart of mathematics, American Mathematical Monthly, 87, 1980.
- Johnson-Laird P.N., Mental Models: towards a cognitive science of language, inference, and consciousness. Cambridge University Press, Cambridge, 1983 (trad. it. Modelli Mentali, il Mulino, Bologna, 1988).

- Lolli G., *Matematica come narrazione*. Il Mulino, Bologna, 2018.
- Lombardo Radice L., *Elogio del gioco*, in *Il giocattolo più grande*, Giunti Marzocco, Firenze, 1979.
- Maier H., *Il conflitto tra lingua matematica e lingua quotidiana per gli allievi*. Ed. Pitagora, Bologna, 1998.
- Manzoni A., *Dell'invenzione*. Dialogo. in *Id., Opere varie*, Fratelli Rechiedi, Stabilimento Radaelli, 1870 Milano.
- Maurizi L., *Matematica, cosa ne pensano i bambini: indagine in una prima elementare*, In *Bollettino dei docenti di matematica*, gennaio 2014.
- Meccariello A., Mentasti R., *Parola d'ordine STEM: conoscere per colmare il divario di genere. L'importanza del curricolo interdisciplinare di educazione finanziaria per promuovere il pensiero scientifico nella scuola primaria*, IUL Research Open Journal of IUL University, Vol. 1 n. 2, 2020.
- Nesher P., *The Stereotyped Nature of Word Problems. For the Learning of Mathematics*, 1, 1980.
- Perret Clermont A.N., Schubauer Leoni M.L., Trognon A., *L'extorsion des réponses en situation asymétrique*. *Verbum (Conversations adulte/enfants)*, 1992.
- Platone, *La Repubblica*, 497 d-e.
- Pontecorvo, *Educazione e scuola di fronte alle differenze di intelligenza: AA.VV., Intelligenza e diversità*, Loescher, Torino, 1981.
- Polya G., *How solve it*, traduzione italiana Polya G. (1945). *How solve it*. [Traduzione italiana: Milano, Feltrinelli, 1967].
- Polya G., *La scoperta matematica. Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi*, (vol. II), Milano, 1971.
- Quaglia R., *Giocare, un'esigenza della mente*. *International Journal of Developmental and Educational Psychology*, vol. 1, n. 1, 2006, pp. 483-493.
- Rodari G., *Grammatica della fantasia. L'arte di inventare storie*. Einaudi Ragazzi, San Dorligo della Valle (TS), 2010.
- Sabena C., *Didattica della matematica, disciplina scientifica per una scuola efficace*. Convegno in videoconferenza. A cura di B. D'Amore – S. Sbaragli, Pitagora Editrice Bologna, 2020.
- Sandman, R.S., *The mathematics attitude inventory: instrument and user's manual*, «*Journal for research in mathematics education*», 11, 1980.
- Sbaragli S., *Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili". La matematica e la sua didattica*. 1, 2005.
- Sbaragli S., *Didattica della matematica, disciplina scientifica per una scuola efficace*. Convegno in videoconferenza. A cura di B. D'Amore – S. Sbaragli, Pitagora Editrice Bologna, 2020.
- Schoenfeld A.H., *On Mathematics as Sense-Making: an informal Attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics*, in J.F. Voss, D.N. Perkins, J. Segal, *Informal reasoning and education*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale (NJ).
- Sgambelluri R., *Il gioco come strumento di cura educativa: cenni storici e codici pedagogici a confronto*, *Formazione & Insegnamento*, XIII – 2 – 2015.
- Tonelli M., Zan R., *Il ruolo dei comportamenti metacognitivi nella risoluzione di problemi. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 18A, n. 1, 8-33 199.
- Vigo A., *Le ragioni del laboratorio come scelta didattica*, in A. di Bella – N. Rapelli (eds.), *Banchi di nuvole*, Ferraro, Pozzuoli (NA).
- Vygotskij L.S., *Play and its role in the mental development of the child*, in *Vosproy Psikhologii*.
- Winnicott W., *Playing And reality*, Tavistock, 1971, London (trad. it. *Gioco e realtà*, Armando, Roma, 1974).
- Zan R., *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*, Springer – Verlag Italia, Milano, 2007.
- Zan R., *La dimensione narrativa di un problema: il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo*, Pisa, 2012.
- Zan R., *I problemi di matematica. Difficoltà di comprensione e formulazione del testo*, Ed. Carocci Faber, Roma, 2021.

Sitografia

Capone R., *Corso di Didattica della Matematica*, <https://www.robertocapone.com/didattica/didattica-della-matematica/>

Gennari G., Dehaene S., Valera C., Dehaene-Lambertz G., Spontaneous supra-modal encoding of number in the infant brain *Current Biology* In press, corrected proof Published online: April 17, 2023 <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/37071994/>

Lucangeli D., Perini N., Cecilia e le difficoltà in matematica: un caso di impotenza appresa, marzo 2014 <https://www.genitorisidiventa.org/notiziario/cecilia-e-le-difficolt%C3%A0-matematica-un-caso-di-impotenza-appresa>

Polya G., in Luigi Regoliosi 26 marzo 2014, *IlSussidiario.net* <https://www.ilsussidiario.net/news/educazione/2014/3/26/scuola-matematica-e-non-solo-ecco-il-decalogo-per-insegnare-bene/485700/>

Rapporto Almaurea 2020, https://www.almaurea.it/sites/default/files/2022-05/almaurea_profilo_rapporto2020_0.pdf